



## شاخه‌های ریاضیات • جعفر ربانی

# مبناهای اعداد

و عددهای زیر رایبه صورت بالایه مضرب‌های ۱۰ تجزیه کنید و عملیات را در همین صفحه در جای خالی انجام دهید.

۱۴۵۵۵      ۱۷۵۱      ۲۶۴      ۵۶

اکنون که با عددهای در مینای ۱۰ آشنا شدید، می‌پرسیم: آیا می‌توان عددی رایبه صورتی نوشت که به جای مضرب ۱۰، مضرب عدد کمتری باشد؟ مثلاً مضرب ۸، ۹، ... و ۲؟ پاسخ مثبت است. یلداوری می‌کنیم، همان‌طور که عددی مثل ۳۴ که عبارت است از ۴ به اضافه ۳۰، می‌تواند طوری نوشته شود که ۴ به اضافه ۳×۷ باشد. در این صورت آن رایبه صورت (۳۴)<sub>۷</sub> می‌نویسیم و می‌خوانیم ۳۴ در مینای ۷. حال اگر این عدد را مثل عددهایی که در بالا تجزیه کردیم، تجزیه کنیم خواهیم داشت:

$$(۳۴)_{۷} = ۴ + ۳ \times ۷ = (۲۵)_{۱۰}$$

به همین ترتیب می‌توانیم عددهای دیگری یا میناهای متفاوت داشته باشیم. نخست عددهای در مینای ۱۰ را می‌نویسیم:

$$(۳۶۲)_{۱۰} = ۲ + ۶ \times ۱۰ + ۳ \times ۱۰ \times ۱۰ = ۳۶۲$$

$$(۳۰)_{۱۰} = ۰ + ۳ \times ۷ = (۲۱)_{۱۰}$$

$$(۴۰)_{۷} = ۰ + ۴ \times ۷ = ۲۸$$

$$(۳۱)_{۷} = ۱ + ۳ \times ۷ = ۲۲$$

$$(۴۰)_{۵} = ۰ + ۴ \times ۵ = ۲۰$$

$$(۴۱۱)_{۶} = ۱ + ۱ \times ۶ + ۴ \times ۶ \times ۶ = ۱۵۱$$

$$(۹۲۰)_{۸} = ۰ + ۲ \times ۸ + ۹ \times ۸ \times ۸ = ۵۹۲$$

تا اینجا چند نکته یاد گرفتیم:

۱. عددهایی که ما در محاسبه‌های روزمره در همه جا به کار می‌بریم، همه بر مینای ۱۰ هستند. به همین دلیل هیچ‌گاه عدد ۱۰ را ته می‌نویسیم و ته بر زبان می‌آوریم.
۲. به‌جز عددهای در مینای ۱۰، در میناهای دیگر باید عدد را در پراتزینویسیم و شماره مینا را نیز بیرون آن بنویسیم. برای مثال، (۲۸۴)<sub>۷</sub> را می‌خوانیم ۲۸۴ در مینای ۷ و نیز (۲۵۵۲)<sub>۹</sub> را می‌خوانیم ۲۵۵۲ در مینای ۹.
۳. همه عددها را می‌توان به عددهای دیگر یا میناهای دلخواه تبدیل کرد.

عزیزان دانش‌آموزی این شماره، دوره بیست و هفتم مجله به پایان می‌رسد و سلسله نوشتارهای ما با عنوان «شاخه‌های ریاضیات» نیز خاتمه می‌یابد. اکنون در این شماره شما را با میناهای عددها آشنا می‌کنیم و امیدواریم این مجموعه مقدمه‌ای برای آشنایی بیشتر شما با جهان ریاضیات باشد. مبحث را با یک داستان کوتاه تخیلی شروع می‌کنیم.

### مردم عجیب سیاره آلفا

قضاتوری که به سیاره آلفا سفر کرده بود، در گزارش خود به پایگاه فضایی روی زمین گفته بود: «در اینجا با مردمی رویه‌رو شدم که ۱۰ قرزند دارد که از آن‌ها ۱۰ توه متولد شده است. او با اینکه یک سر بیشتر ندارد، اما ۱۰ چشم، ۱۰ گوش، ۱۰ سوراخ بینی، ۱۰ دست و ۱۰ پا دارد و هر یک از دست و پاهایش نیز دارای ۱۰ انگشت است.»

همکاران قضاتورد از این گزارش بسیار شگفت‌زده شدند و گفتند آلفا باید سیاره‌ای با موجودات عجیب باشد؛ اما چیزی نگذشت که به راز این گزارش پی بردند. فکر می‌کنید راز آن چه بود؟ در پایان این نوشته خواهیم دید.

### دستگاه ده‌دهی

شما باید بدانید که به دستگاه عددنویسی رایج در همه جا دستگاه ده‌دهی یا عددنویسی در مینای ۱۰ می‌گویند. برای مثال، عدد ۸۵۴۲ را در تفلر بگیرد. این عدد حاصل جمع چهار عدد دیگر است:

$$\begin{array}{r} ۸۰۰۰ \\ ۵۰۰ \\ ۴۰ \\ + ۲ \\ \hline ۸۵۴۲ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ۹۰۰۰ \\ ۳۰۰ \\ ۸۰ \\ + ۵ \\ \hline ۹۳۸۵ \end{array}$$

چنان که می‌بینید، در این دو عدد به‌جز یکان‌ها (یعنی ۲ و ۵) بقیه عددها مضرب‌های ۱۰ هستند. برای مثال، در عدد دوم، ۹۰۰۰ رایبه صورت (۹×۱۰×۱۰×۱۰) و ۳۰۰ رایبه صورت (۳×۱۰×۱۰) و ۸۰ رایبه صورت (۸×۱۰) می‌توان نوشت. حالا شما امتحان کنید



دلخواه، عدد اول را بر عدد مینا تقسیم می‌کنیم و این عمل را تا زمانی که خارج‌قسمت بر عدد مینا قابل تقسیم باشد، ادامه می‌دهیم. آنگاه آخرین خارج‌قسمت و سپس باقی‌مانده‌های قبلی را از چپ به راست کنار هم می‌نویسیم. عدد به‌دست‌آمده نتیجه مسئله است.

چند مثال دیگر: عددهای ۴۹، ۳۲۰ و ۹۰ را به ترتیب به عددهایی در میناهای ۸، ۵ و ۲ تبدیل کنید.

$$1. \quad \begin{array}{r} 49 \quad | \quad 8 \\ -48 \quad | \quad 1 \\ \hline \end{array} = (61)_8$$

$$2. \quad \begin{array}{r} 320 \quad | \quad 5 \\ -300 \quad | \quad 20 \\ \hline 20 \quad -60 \quad | \quad 12 \quad | \quad 5 \\ -20 \quad | \quad 4 \quad -10 \quad | \quad 2 \\ \hline \end{array} = (2240)_5$$

$$3. \quad \begin{array}{r} 90 \quad | \quad 2 \\ -8 \quad | \quad 45 \quad | \quad 2 \\ \hline 10 \quad -4 \quad | \quad 22 \quad | \quad 2 \\ \hline -10 \quad | \quad 5 \quad -2 \quad | \quad 11 \quad | \quad 2 \\ \hline \quad \quad 4 \quad 2 \quad -10 \quad | \quad 5 \quad | \quad 2 \\ \quad \quad \quad \quad 2 \quad -4 \quad | \quad 2 \quad | \quad 2 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad -2 \quad | \quad 1 \quad | \quad 2 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 1 \quad | \quad 1 \quad | \quad 2 \\ \hline \end{array} = (1011010)_2$$

**تبدیل مینا به مینا**

تبدیل یک مینا به مینای دیگر (به‌جز مینای ۱۰) بسیار ساده است. ابتدا عدد اول را به مینای ۱۰ و سپس عدد به‌دست‌آمده را به مینای دیگر می‌نویسیم.

مثال: عدد (۱۲۵)<sub>۱۰</sub> را به عددی در مینای ۸ تبدیل کنید.

$$(125)_{10} = 5 + 2 \times 6 + 1 \times 6 \times 6 = (65)_8$$

$$\begin{array}{r} 53 \quad | \quad 8 \\ -48 \quad | \quad 5 \\ \hline \end{array}$$

اکنون وقت آن است که به ماجرای قضایاورد سیاره آلفا برگردیم و ببینیم وضعیت آن موجودات عجیب چه بوده است.

واقعیت این است که رایله آن قضایاورد عددها و رقم‌ها را در مینای ۲ دریافت کرده و بدون تبدیل به مینای ۱۰، به زمین فرستاده بود. در نتیجه موجب شگفتی زمینی‌ها شده بود. حالا ببینیم آن عددهای درشت وقتی به عددهای معمولی تبدیل شدتند، چه رقم‌هایی را نشان دادند:

تعداد فرزندان (۱۰)<sub>۲</sub> = ۰ + ۲ = ۲ یعنی: (۱۰)<sub>۲</sub> = ۰ + ۲ = ۲

پس آن مرد ۲ فرزند بیشتر نداشته است و به همین ترتیب تعداد توه‌هایش: (۱۰۱۰)<sub>۲</sub> = ۱۰

تعداد گوش‌ها، چشم‌ها و سوراخ‌های بینی: (۱۰)<sub>۲</sub> = ۲

و تعداد انگشتان هر دست و پا: (۱۰۱)<sub>۲</sub> = ۵

بنابراین آن موجودات هم مثل خودمان بوده‌اند!

۴. رقم‌های هر عدد همیشه کوچک‌تر از رقم مینا هستند. مثلاً (۲۵)<sub>۱۰</sub>، (۴۰۱)<sub>۱۰</sub>، (۲۸۴)<sub>۱۰</sub> و (۲۹۹)<sub>۱۰</sub> صحیح، اما عددهای (۹۲۵)<sub>۱۰</sub>، (۶۴)<sub>۱۰</sub>، (۵۱۲)<sub>۱۰</sub> و (۶۳۷)<sub>۱۰</sub> غلط هستند و وجود ندارند.

۵. هر چه عددی به مینای کوچک‌تری تبدیل شود، ظاهر آن بزرگ‌تر خواهد شد.

۶. همان‌طور که در دستگاه ده‌دهی عددها را با رقم‌های ۰ تا ۹ می‌نویسیم، در دستگاه‌های یا مینای کمتر نیز رقم کمتری می‌نویسیم. مثلاً همه عددهای مینای ۴ فقط با چهار رقم ۰، ۱، ۲ و ۳ نوشته می‌شوند.

۷. ضمناً به جای واژه «مینا» می‌توان از واژه «پایه» هم برای نام‌گذاری این عددها استفاده کرد.

**تبدیل میناها**

تبدیل میناها به یکدیگر به‌سادگی انجام می‌شود. این کار مشابه بازکردن یا تجزیه عددهای معمولی که بر مینای ۱۰ هستند صورت می‌گیرد. یعنی همان‌طور که داریم:

$$(428)_{10} = 8 + 2(10) + 4(10 \times 10) = 428$$

برای عددی یا مینای مثلاً پنج نیز همان‌گونه عمل می‌کنیم:

$$(428)_{10} = 8 + 2(5) + 4(5 \times 5) = 123$$

اکنون می‌توان گفت قاعده کلی تبدیل عددی چهاررقمی مثل abcd در پایه n به عددی در پایه ۱۰ چنین است:

$$(abcd)_{10} = d + c(n) + b(n^2) + a(n^3)$$

به همین نحو می‌توان عددهای دارای رقم‌های بیشتر را نیز تبدیل کرد.

**چند مثال**

$$(47)_{10} = 7 + 4(10) = 47$$

$$(461)_{10} = 1 + 6(10) + 4(10^2) = 151$$

$$(4531)_{10} = 1 + 3(6) + 5(6^2) + 4(6^3) = 415$$

$$(4444)_{10} = 4 + 4(5) + 4(5^2) + 4(5^3) = 624$$

$$(12222)_{10} = 2 + 2(4) + 2(4^2) + 2(4^3) + 1(4^4) = 506$$

**تبدیل معکوس**

همان‌طور که می‌توان عددهای یا میناهای متفاوت را به عددی در مینای ۱۰ تبدیل کرد، برعکس هم می‌توان عددهای در مینای ۱۰ را به عددهای در مینای دلخواه تبدیل کرد. ابتدا یک مثال را حل می‌کنیم و بعد قاعده آن را نشان می‌دهیم.

مثال: می‌خواهیم عدد ۲۶۳ را به مینای ۹ ببریم. برای این کار در یک رشته تقسیم‌های پیاپی چنین عمل می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} 263 \quad | \quad 9 \\ -18 \quad | \quad 29 \quad | \quad 9 \\ \hline 83 \quad -27 \quad | \quad 3 \\ \hline -81 \quad | \quad 2 \\ \hline \end{array}$$

نتیجه: (۳۲۲)<sub>۹</sub>

قاعده: برای تبدیل عددی در مینای ۱۰ به عددی در مینای